

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ И
НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДОЙ

И. Т. ПИРМАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

В данной статье с помощью вариационного принципа исследуются параметрические колебания тонкой, неоднородной, нелинейной по толщине вязко-упругой цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с вязко-упругим заполнителем, находящейся под действием внешнего давления. Рассматривается случай линейной вязко-упругости. Построены зависимости зоны динамической устойчивости колебаний цилиндрической оболочки с вязко-упругим заполнителем от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота.

Опыт создания оптимальных конструкций, накопленный в различных отраслях машиностроения, авиастроения, судостроения и т.д., приводит все большему расширению использования конструкционных материалов. Это в свою очередь приводит к необходимости более полного учета особенностей материалов и конструкций с целью рационального конструирования и проведения надежного расчета на прочность. Для более полного описания несущей способности конструкции целесообразно учитывать силы внешнего воздействия со стороны вязко-упругого заполнителя. Силы внешнего воздействия со стороны вязко-упругого заполнителя, по сути, являются поверхностными силами и обусловлены контактом между оболочкой и заполнителем. Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая углубляется учетом динамических эффектов, что необходимо в задачах сейсмостойкости, вибрации, которые часто встречаются в технике. Поэтому требуются разработки приближенных методов. Одним из приближенных методов является вариационный. Преимуществом этого метода является то, что он позволяет получить непротиворечивые приближенные теории тонкостенных конструкций типа оболочек и стержней.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщиной $2h$, длиной l , заполненной вязко-упругой средой. Предположим, что интенсивность нагрузки, действующий на оболочку со стороны заполнителя, можно написать в следующем виде:

$$q_z = k_c w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(\tau) d\tau,$$

где Γ - ядро релаксации [1], а коэффициент k_c определяется зависимостью

$$k_c = \tilde{q} + \tilde{q}_0 \frac{d^2}{dx^2} \text{ (модель Пастернака).}$$

Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены:
при

$$N_{xx} = 0; M_{xx} = 0; W = 0; v = 0, x = 0, l.$$

Здесь N_{xx} - усилия, M_{xx} - моменты, v, ω - компоненты вектора перемещений точки оболочки.

Для исследования параметрических колебаний тонких цилиндрических вязко-упругих оболочек, заполненных средой, применим вариационный принцип. В физических проекциях соответствующий функционал примет вид [1]:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{\pi/l} \int_0^l \int_0^{\pi/k} \left\{ \dot{N}_{xx} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{N}_{x\varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{N}_{\varphi\varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{w}}{R} + \right. \\ & + \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \dot{M}_{xx} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \dot{M}_{x\varphi} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x \partial \varphi} - \\ & - \dot{M}_{\varphi\varphi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{8h^2} \dot{N}_{xx} \left[\frac{1}{E_0} (\dot{N}_{xx} - \nu N_{\varphi\varphi}) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{E_1} (\dot{M}_{xx} - \nu \dot{M}_{\varphi\varphi}) \frac{3}{h^2} \right] - \frac{3}{8h^4} \dot{M}_{xx} \left[\frac{1}{E_1} (\dot{N}_{xx} - \nu N_{\varphi\varphi}) + \right. \\ & + \left. \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_2} (\dot{M}_{xx} - \nu \dot{M}_{\varphi\varphi}) \right] - \frac{1}{8h^2} \dot{N}_{\varphi\varphi} \left[\frac{1}{E_0} (\dot{N}_{\varphi\varphi} - \nu N_{xx}) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{E_1} \frac{3}{h^2} (\dot{M}_{\varphi\varphi} - \nu \dot{M}_{xx}) \right] - \frac{3}{8h^4} \dot{M}_{\varphi\varphi} \left[\frac{1}{E_1} (\dot{N}_{\varphi\varphi} - \nu N_{xx}) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{E_2} \frac{3}{h^2} (\dot{M}_{\varphi\varphi} - \nu \dot{M}_{xx}) \right] - \frac{1+\nu}{4h^2} \dot{N}_{x\varphi} \left[\frac{1}{E_0} \dot{N}_{x\varphi} + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_1} \dot{M}_{x\varphi} \right] - \\ & - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{x\varphi} \left[\frac{1}{E_1} \dot{N}_{\varphi\varphi} + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_2} \dot{M}_{x\varphi} \right] (1+\nu) - \frac{1}{4h^2} \dot{N}_{xx}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) (2N_{xx} - N_{\varphi\varphi}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2M_{xx} - M_{\varphi\varphi}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{xx} \left[\int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2N_{xx} - N_{\varphi\varphi}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) (2M_{xx} - M_{\varphi\varphi}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{1}{4h^2} \dot{N}_{\varphi\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) (2N_{\varphi\varphi} - N_{xx}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2M_{\varphi\varphi} - M_{xx}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{\varphi\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2N_{\varphi\varphi} - N_{xx}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) (2M_{\varphi\varphi} - M_{xx}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{1}{2h^2} \dot{N}_{x\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) N_{x\varphi} d\tau + \frac{3}{h^2} \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) M_{x\varphi} d\tau \right] - \\
& - \frac{3}{2h^4} \dot{M}_{x\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) N_{x\varphi} d\tau + \frac{3}{h^2} \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) M_{x\varphi} d\tau \right] \Big\} R dx d\varphi dt + \\
& + \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} R \dot{q} \dot{W} dx d\varphi dt - \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} q_z \dot{W}^2 dx d\varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} \rho_0 \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 R d\varphi dx dt. \quad (1)
\end{aligned}$$

В функционале (1) приняты обозначения: $\frac{1}{E_i} = \int_{-h}^h \frac{z^i}{E(z)} dz$,

$$K_i = \int_{-h}^h z^i K(z, t) dz \quad \rho_i = \int_{-h}^h \rho(z) z^i dz \quad i = 0, 1, 2. \text{ Кроме того, } q_z \text{ — нормальное}$$

давление на оболочку со стороны вязко-упругого заполнителя и также принято, что

$$K(z, t) = \frac{a}{E(z)} e^{-\beta t}, \quad (2)$$

где a — механический параметр, β — показатель экспоненты. Такая зависимость (зависимость от z) продиктована тем, что для однородного случая коэффициент при экспоненте, как обычно, пропорционален модулю Юнга. В этом случае образы Фурье для (2) имеют вид:

$$\Phi_0 = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} dy = \frac{a}{\beta}; \quad \Phi_s = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sin \omega y dy = a \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2};$$

$$\Phi_c = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \cos \omega y dy = a \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

В функционале (1) варьируемыми величинами являются \dot{u} , \dot{W} , \dot{v} , \dot{N}_{xx} , $\dot{N}_{x\varphi}$, \dot{M}_{xx} , $\dot{M}_{\varphi\varphi}$, $\dot{M}_{x\varphi}$. Определим стационарное значение функционала (1). Для этого применим метод Ритца. Исходя из ожидаемой физической картины, колебания цилиндрической оболочки, неизвестные величины ищем в виде:

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t), \\ v &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (v_0 \cos \omega t + v_1 \sin \omega t), \\ W &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (W_0 \cos \omega t + W_1 \sin \omega t), \\ N_{xx} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{10} \cos \omega t + N_{11} \sin \omega t), \\ N_{x\varphi} &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (N_{30} \cos \omega t + N_{31} \sin \omega t), \\ N_{\varphi\varphi} &= -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{20} \cos \omega t + N_{21} \sin \omega t), \\ M_{xx} &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{10} \cos \omega t + M_{11} \sin \omega t), \\ M_{\varphi\varphi} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{20} \cos \omega t + M_{21} \sin \omega t), \\ M_{x\varphi} &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (M_{30} \cos \omega t + M_{31} \sin \omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

где k - число волн в окружном направлении. Отметим, что это число должно быть четным ввиду периодичности задачи. Первое слагаемое выражения для окружного напряжения указывает на аналог аппроксимации с аппроксимацией для статики. Подставим аппроксимации (3) в функционал (1) и проинтегрируем по x и t . Тогда получим функцию от \dot{u}_i , \dot{v}_i , \dot{W}_i , \dot{N}_{3i} , \dot{M}_{3i} , \dot{N}_{1i} , \dot{N}_{2i} , \dot{M}_{1i} , \dot{M}_{2i} , которая здесь не приводится ввиду громоздкости этого выражения. Стационарное значение полученной функции определяется из следующей системы:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial J}{\partial \dot{u}_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial \dot{u}_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \dot{v}_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \dot{v}_1} = 0; \\ 5) \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_0} = 0; \quad 6) \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_1} = 0; \quad 7) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{10}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{11}} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{30}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{31}} = 0; \quad 11) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{20}} = 0; \\
& 12) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{10}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{11}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{20}} = 0; \\
& 15) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{21}} = 0; \quad 16) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{30}} = 0; \quad 17) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{31}} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Начальные значения для решения этой системы, следующие: при отсутствии нагрузки в оболочке имеет место естественное состояние, т.е. при $q_i = 0$ имеем

$$u_j = v_j = W_j = 0; \quad N_{ij} = M_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Итак, приведенная система приближенно описывает параметрические колебания нелинейной вязко-упругой оболочки неоднородной по толщине с учетом нелинейности прогиба, где учтены силы трения между оболочкой и заполнителем. Полученные системы уравнений являются системами квазилинейных дифференциальных. Для их решения сначала она была разрешена относительно производных $\dot{u}_0, \dot{u}_1, \dot{v}_0, \dot{v}_1, \dot{W}_0, \dot{W}_1, \dot{N}_{10}, \dot{N}_{11}, \dot{N}_{30}, \dot{N}_{31}, \dot{N}_{20}, \dot{N}_{21}, \dot{M}_{10}, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{20}, \dot{M}_{21}, \dot{M}_{30}, \dot{M}_{31}$, а потом, применяя метод Рунге-Кутты, решена задача Коши при вышеставленных начальных условиях. Для численной реализации задачи введены безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
C_i &= W_i/h; \quad V_i = v_i/h; \quad U_i = u_i/h; \quad n_{1i} = N_{1i}/(E_x h); \\
m_{1i} &= M_{1i}/(E_x h^2); \quad n_{2i} = N_{2i}/(E_x h); \quad n_{3i} = N_{3i}/(E_x h); \\
m_{2i} &= M_{2i}/(E_x h^2); \quad m_{3i} = M_{3i}/(E_x h^2) \quad (i = 0, 1).
\end{aligned}$$

Задавая $k = 4$ находим при всех заданных параметрах и ω наименьшее τ_{ikp} , где $\tau_{inp} = q_1 R$. На рис. 1 приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота.

Для удобства счета были введены, наряду с вышеприведенными безразмерными параметрами, следующие величины:

$$\begin{aligned}
W_0 &= c_0 h; \quad W_1 = c_1 h; \quad \omega = \omega_0 \beta; \\
\frac{1}{E_i} &= h^{i+1} \frac{1}{E_x} \frac{1}{l_i}; \quad \rho_0 = \frac{\rho E_x h^3}{\beta^2}; \quad \rho_i = \tau_i E_x h^3.
\end{aligned}$$

Расчет проводился для следующих значений параметров задачи:

$$\alpha = 0,5; 0,9; 0; \quad ; \quad 1; A = 0,1615; \beta = 0,05 \quad (\Gamma(t) = Ae^{-\beta t})$$

$$\alpha_0 = 0,05; 0,1; 0; \quad k_c = 24 \cdot 10^3 \text{ кз/м}^3; \rho = 0,3; \tau_0 = 0,03; 0,09.$$

При этом были рассмотрены два варианта изменения модуля Юнга по толщине оболочки:

линейная - $E(z) = E_x \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right) \right],$

параболическая - $E(z) = E_x \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$, где E_x – характерный модуль Юнга,

α - параметр неоднородности. Отметим, что в случае линейной функции $|\alpha| < 1$, а в случае параболической функции α может быть любого знака, однако для отрицательного α он по модулю должен быть меньше единицы.

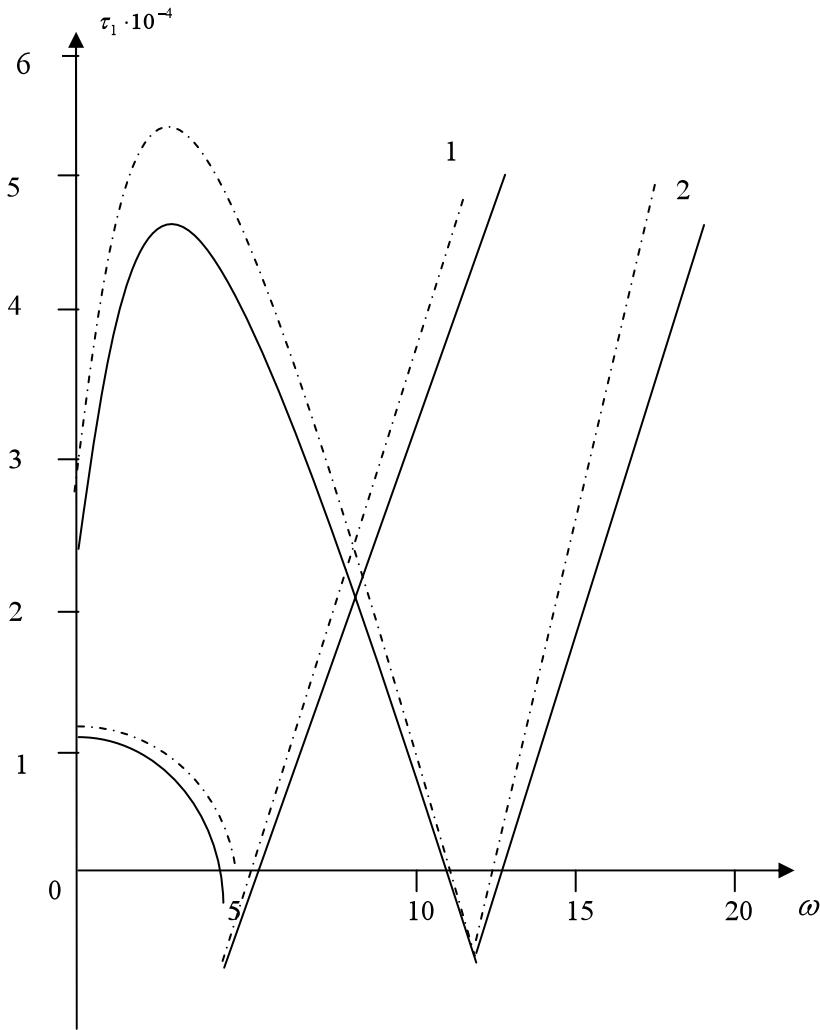


Рис.1. Зависимость τ_1 от ω для линейного закона изменения модуля упругости по толщине при следующих значениях параметров: $h_0 = 0,03$; $\alpha = 0,4$; $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$; $\rho = 2 \cdot 10^{-5}$; $\beta_0 = 1$; $f = 0,25$ ($1 - k = 2$; $2 - k = 4$),

На рис.1 штриховым линиям соответствуют колебания цилиндрической оболочки с упругим наполнителем, а сплошным линиям соответствуют колебаниям цилиндрической оболочки с вязко-упругим наполнителем. Счет показывает, что учет вязкости наполнителя приводит к уменьшению критической силы потери устойчивости оболочки. Кроме того, учет динамических действий наполнителя на процесс параметрических колебаний рассмотренной системы (модель Пастернака) приводит снижению критической силы по сравнению с критической силой, полученной для модели Винклера.

Во всех случаях волнообразованию соответствует значение $k = 2$. Отметим, что при $k = 4$ характерная кривая сдвигается и не представляет практический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ализаде А.Н., Амензаде Р.Ю. Вариационный принцип нелинейно –вязкоупругости с учетом геометрической нелинейности. ДАН СССР, т.230, №6, 1976,с.1303-1305.
2. Беляев Н.М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Сб. статей «Инженерные сооружения и строительная механика», Изд-во Путь, Л., 1924.
3. Юсифов М.О. Параметрические колебания трубопроводов с учетом покрытия. Деп. в ВИНИТИ, 20.06.87, №796-Аз., 7с.

ÖZLÜ-ELASTİKİ MÜHİTLƏ DİNAMİK QARŞILIQLI TƏSİRDƏ OLAN QEYRİ-XƏTTİ, QALINLIĞI BOYU QEYRİ-BİRCİNS, ÖZLÜ-ELASTİKİ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN PARAMETRİK RƏQSLƏRİ

İ.T.PİRMƏMMƏDOV

XULASƏ

Təqdim olunan məqalədə özlü-elastiki mühitlə dinamik qarşılıqlı təsirdə olan qeyri-xətti, qalınlığı boyu qeyri-bircins, özlü-elastiki silindrik örtüyün parametrik rəqsləri tədqiq olunmuşdur. Məsələ variasiya prinsipinin köməyi ilə həll edilmişdir. Mühitin silindrik örtüyə təsirini nəzərə almaq üçün Pasternak modelindən istifadə olunmuşdur. Qüvvə-tezlik müstəvisində xarakterik əyrilər qurulmuşdur.

PARAMETRIC OSCILLATIONS OF NON-LINEAR, INHOMOGENEOUS IN THICKNESS, VISCOUS-ELASTIC CYLINDRICAL CONTACTING WITH VISCOUS-ELASTIC MEDIUM

I.T.PIRMAMEDOV

SUMMARY

Parametric oscillations of non-linear, inhomogeneous in thickness, viscous-elastic cylindrical shell contacting with medium is investigated in the paper. The problem is solved by variation principle. Pasternak model is used to take into account the influence of medium on cylindrical shell. Characteristic curves are structured on force-frequency surface.